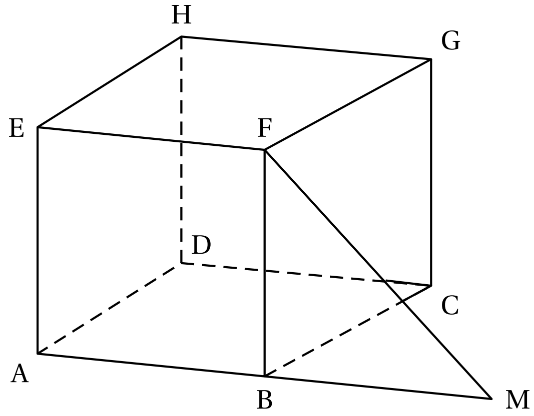
Exercice 2 **5 points**



On considère le cube ABCDEFGH.

On place le point M tel que $\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{AB}$.

Partie A

1. Montrer que les droites (FG) et (FM) sont perpendiculaires.
2. Montrer que les points A, M, G et H sont coplanaires.

Partie B

On se place dans le repère orthonormé $\left(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}\right)$.

1. Déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{GM}$ et $\overrightarrow{AH}$ et montrer qu'ils ne sont pas colinéaires.
2. **a.** Justifier qu'une représentation paramétrique de la droite (GM) est :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x &=& 1+t \\ y &=& 1-t \\ z &=& 1-t \end{array}\right. \quad \text{avec } t \in \mathbb{R}.$$

   b. On admet qu'une représentation paramétrique de la droite (AH) est :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x &=& 0 \\ y &=& k \\ z &=& k \end{array}\right. \quad \text{avec } k \in \mathbb{R}.$$

   Montrer que le point d'intersection de (GM) et (AH), que l'on nommera N, a pour coordonnées $(0\,;\,2\,;\,2)$.

3. **a.** Montrer que le triangle AMN est un triangle rectangle en A.

   b. Calculer l'aire de ce triangle.

4. Soit J le centre de la face BCGF.

   a. Déterminer les coordonnées du point J.

   b. Montrer que le vecteur $\overrightarrow{\text{FJ}}$ est un vecteur normal au plan (AMN).

   c. Montrer que J appartient au plan (AMN). En déduire qu'il est le projeté orthogonal du point F sur le plan (AMN).

5. On rappelle que le volume $\mathcal{V}$ d'un tétraèdre ou d'une pyramide est donné par la formule :

$$\mathcal{V} = \frac{1}{3} \times \mathcal{B} \times h,$$

$\mathcal{B}$ étant l'aire d'une base et h la hauteur relative à cette base.

Montrer que le volume du tétraèdre AMNF est le double du volume de la pyramide BCGFM.